ÜBER

EBENE CURVEN DRITTER ORDNUNG

WELCHE EINEN MITTELPUNKT HABEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT ZU BASEL

VORGELEGT VON

HENRI VEILLON

AUS AIGLE UND BEX (CT. WAADT).

BASEL

L. REINHARDT, UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI

1890.

ÜBER

EBENE CURVEN DRITTER ORDNUNG

WELCHE EINEN MITTELPUNKT HABEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWÜRDE

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT ZU BASEL

VORGELEGT VON

HENRI VEILLON

AUS AIGLE UND BEX (CT. WAADT).

BASEL

L. REINHARDT, UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI

1890.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548826_0115

Meinen hochverehrten Eltern

als Zeichen inniger Liebe und Dankbarkeit.

Das Thema zur vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Dr. phil. Adolf Schwarz (aus Beneschau bei Prag), mit welchem ich in Berlin bekannt wurde. Aus gelegentlichen Besprechungen des Gegenstandes und damit zusammenhängender Dinge, erwuchsen mir Vortheile oder nützliche Gesichtspunkte, für welche ich ihm an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche.

Ferner rechne ich es mir zur Ehre an, meinen hochverehrten Lehrern und ganz besonders den Herren Professoren Doctoren H. Kinkelin, Ed. Hagenbach-Bischoff, H. Heussler, J. Piccard, F. Burckhardt, A. Riggenbach-Burckhardt meinen tiefgefühltesten Dank auszusprechen für das Interesse, welches sie mir stets und in so freundschaftlicher Weise erwiesen haben.

EINLEITUNG.

In einer grössern Abhandlung[1]) hat Steiner die algebraischen Curven n^{ter} Ordnung, welche einen Mittelpunkt besitzen, eingehend behandelt. Dabei spielen die ebenen Curven dritter Ordnung eine bedeutende Rolle, und die diesbezüglichen Resultate sind meist vom Standpunkt der allgemeinen Curventheorie aus gewonnen.

Die vorliegende Arbeit soll nun ein Versuch sein, die ebenen Curven dritter Ordnung für sich zu untersuchen im Falle, dass sie einen Mittelpunkt besitzen. Es liegt nahe zu vermuthen, dass man auf direktem Wege, indem man von der Erzeugung solcher Curven mittelst projectivischer Kegelschnittbüschel und Strahlbüschel ausgeht, gewisse Eigenschaften in einfacher Weise darstellen könne. Möge es daher nicht als eine Anmassung angesehen werden, dass ich ein Gebiet betreten habe, in welchem ein Mann wie Steiner Denksteine seiner Thätigkeit hinterlassen hat.

Was die Methode der Behandlung in den folgenden Betrachtungen betrifft, so habe ich mich nicht an diese oder jene ausschliesslich gehalten, indem mir bald die synthetischen Verfahren, bald die Hilfsmittel aus der Analysis als geeigneter erschienen.

Da ausschliesslich ebene Gebilde den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bilden, so soll das in den einzelnen

1) Steiner, Ueber solche alg. C., welche einen Mittelpunkt besitzen. Crelle 47.

Fällen nicht mehr besonders hervorgehoben werden. Eine gewöhnliche ebene Curve dritter Ordnung bezeichnen wir symbolisch durch C_3, und eine solche mit einem Mittelpunkt durch C_{III}.

§ 1.

Für die Kegelschnitte gilt folgende Definition: Ein Punkt, der die Eigenschaft hat, dass jede durch ihn gehende Sehne der Curve in ihm halbirt wird, heisst Mittelpunkt des Kegelschnittes.

Diese Definition wollen wir nun für die Curven dritter Ordnung beibehalten. Dass wir dieses dürfen, geht aus folgendem hervor: Eine C_3 wird von jeder Geraden in drei Punkten getroffen. Denken wir uns nun ein Strahlbüschel, dessen Scheitel o auf C_3 liegt, so wird jeder Strahl des Büschels ausser in o noch in zwei Punkten durch C_3 geschnitten. Es ist also wohl denkbar, dass es gewisse Formen von C_3 geben kann, welche bei passender Wahl des Scheitels o auf jedem Strahl des Büschels Strecken abschneiden, die in o einen gemeinsamen Halbirungspunkt besitzen. Es ist selbstverständlich, dass, wenn es solche Punkte o gibt, dieselben auf C_3 selbst liegen müssen.

Ob aber solche C_3 existiren, kann daraus noch nicht geschlossen werden, sondern es bedarf dies einer nähern Untersuchung. Desshalb wird die Frage nach der Existenz solcher Linien eine unserer ersten Aufgaben sein. Bevor wir uns aber an dieselbe machen, stellen wir einige Sätze auf, welche nothwendig bestehen müssen, wenn eine C_3 einen Mittelpunkt haben soll.

Für die Kegelschnitte wird der Satz bewiesen: Durch einen beliebigen Punkt p der Ebene geht im Allgemeinen nur eine einzige Sehne der Curve, die in ihm halbirt wird. Wenn sich aber durch p zwei Sehnen legen lassen, welche

beide diese Eigenschaft besitzen, so wird auch jede beliebige durch p gehende Sehne in p halbirt, oder p ist Mittelpunkt des Kegelschnitts. Für die C_3 lässt sich ein analoger Satz aufstellen.[1])

Betrachten wir die conische Polare eines Curvenpunkts o einer C_3. Sie entsteht auf folgende Weise: Irgend ein Strahl des durch o bestimmten Büschels wird von C_3 ausser in o noch in zwei weitern Punkten a_1, a_2 getroffen. Man bestimme auf dem Strahl den zu o bezüglich a_1, a_2 conjugirten harmonischen Punkt α. Dasselbe denke man sich für jeden Strahl des Büschels gemacht, so ist der geometrische Ort aller Punkte α ein Kegelschnitt, der in o die C_3 berührt und die conische Polare von o bezüglich der Curve genannt wird.

Die conische Polare hat im Allgemeinen zwei unendlich entfernte Punkte u_1, u_2. Verbindet man diese mit o, so schneiden ou_1 und ou_2 die Curve ausser in o noch in je zwei Punktepaare a_1, a_2 und b_1, b_2, welche den Gleichungen genügen:

$$(a_1 a_2 o u_1) = -1 \quad (b_1 b_2 o u_2) = -1,$$

d. h. die Sehnen $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$ werden beide in o halbirt. Da o willkürlich gewählt war, so können wir dieses übrigens bekannte Resultat folgendermassen aussprechen: Durch einen beliebigen Punkt o einer C_3 gehen im Allgemeinen zwei, und nur zwei Sehnen, welche in ihm halbirt werden. Sie werden erhalten, indem man o mit den unendlich fernen Punkten seiner conischen Polaren verbindet.

Bezeichnen wir nun diese beiden Geraden mit A und B, und legen wir durch o eine dritte Sehne C, welche C_3 ausser in o noch in c_1, c_2 schneiden möge. Nun wollen wir die Annahme machen, C_3 sei so beschaffen und o so auf ihr gewählt, dass die Sehne C ebenfalls in o halbirt werde. Dann müssen die unendlich fernen Punkte von A, B, C alle drei der conischen Polaren angehören. Das ist aber nur dann möglich, wenn die unendlich ferne Gerade selbst einen Be-

1) vgl Steiner, die schon citirte Abhandlung.

standtheil der conischen Polaren bildet. Wenn nun dieses der Fall ist, so wird jede beliebige Sehne durch o in diesem Punkte auch halbirt werden. Denn, sei X eine solche Sehne, x_1, x_2 ihre Schnittpunkte mit C_3, so muss $x_1 o = o x_2$ sein, da der zu o conjugirte harmonische Punkt im Unendlichen liegt. Also können wir sagen: Wenn auf einer C_3 ein Punkt o von der Beschaffenheit existirt, dass durch ihn drei Sehnen halbirt werden, so halbirt er auch jede beliebige durch ihn gehende Sehne der Curve.[1])

Unter den oben gemachten Voraussetzungen zerfällt die conische Polare von o in die unendlich ferne Gerade und in eine zweite Gerade. Aus den allgemeinen Eigenschaften der Polaren folgt, dass diese letztere durch o selbst gehen muss, und dass sie in o die Curve berühren muss. Um nun diese Tangente in o zu erhalten, hat man die Gerade durch o und den unendlich nahen Curvenpunkt y_1 zu legen. Die Gerade $o y_1$ schneidet dann C_3 in einem dritten Punkt y_2, welcher so liegt, dass $y_1 o = o y_2$, weil o gemäss den gemachten Voraussetzungen Mittelpunkt sein würde unserer C_3. Da aber $y_1 o$ unendlich klein ist, so muss es auch $o y_2$ sein, oder die Tangente in o hat drei mit der Curve zusammenfallende Punkte gemein und ist daher eine Wendetangente. Der Punkt o ist in diesem Falle ein Wendepunkt.

Dieses lässt sich etwa folgendermassen aussprechen: Besitzt eine C_3 einen Mittelpunkt, so ist derselbe stets ein Wendepunkt.

Bleiben wir immer noch bei der Voraussetzung, dass eine C_3 einen Mittelpunkt haben könne. Derselbe sei o_1. Gesetzt nun, es gebe einen zweiten Mittelpunkt, etwa o_2, so würde der durch o_1 und o_2 bestimmte Strahl mit C_3 einen dritten Punkt x gemein haben, so dass

$$o_1 o_2 = o_2 x$$

und

$$x o_1 = o_1 o_2$$

wäre. Hieraus würde folgen:

1) vgl. Steiner, die schon erwähnte Abhandlung.

$$xo_1 = o_2x \quad \text{oder}$$
$$o_1o_2 = o_1x + xo_2 = 0,$$

d. h. o_1 und o_2 müssten zusammenfallen. Das gibt den übrigens selbstverständlichen Satz:

Wenn C_3 mit Mittelpunkt existiren, so können dieselben stets nur einen einzigen solchen Punkt haben.

Man kann ferner sehen, dass eine einfache C_3 vom Geschlechte Null keinen Mittelpunkt haben kann, es sei denn, dass ihr Doppelpunkt im Unendlichen liege. Sei nämlich d der Doppelpunkt und o der hypothetische Mittelpunkt, so sind zwei Fälle möglich:

1) d und o fallen zusammen. Dann würde die Tangente in o mit der Curve vier [in o] zusammenfallende Punkte gemein haben, was nicht möglich wäre.

2) d und o sind getrennte Punkte. Dann müsste auf od ein bezüglich o zu d diametral gegenüberliegender Punkt vorhanden sein, der ebenfalls wie d Doppelpunkt der C_3 wäre, was unmöglich ist, da eine C_3 höchstens einen Doppelpunkt besitzen kann. Fassen wir das in den Satz zusammen:

Eine einfache oder nichtdegenerirende C_3 vom Geschlechte Null, deren Doppelpunkt im Endlichen liegt, kann niemals einen Mittelpunkt haben.

Sobald wir degenerirende C_3 zulassen, ist unmittelbar ersichtlich, dass solche vorkommen, die einen oder mehrere Doppelpunkte haben und bei denen ein Mittelpunkt möglich ist. So bilden z. B. eine Ellipse oder eine Hyperbel mit je einer Geraden durch ihre Mittelpunkte zwei derartige Fälle. Auf solche zerfallende Curven lassen wir uns aber nicht ein. Ferner hat im Allgemeinen ein C_3 im Unendlichen keinen Doppelpunkt, und wir schliessen diesen Fall aus.

§ 2.

Ein Punkt einer C_3 ist ein Mittelpunkt für die Curve, wenn drei durch ihn gehende Sehnen in ihm halbirt werden. Es soll nun gezeigt werden, dass es in der That einfache C_3 gibt, welche einen Mittelpunkt haben. Es resümirt sich also unsere Aufgabe in die Frage nach der Existenz der allgemeinen C_{III}. Wir geben hier mehrere Beweise, die darin eine Aehnlichkeit unter sich haben, dass wir in ihnen die zur Bestimmung der Curve erforderlichen Stücke derart zu wählen suchen, dass eine C_{III} als Erzeugniss auftritt.

Erster Beweis.

Eine C_3 ist durch die Wahl von neun Punkten bestimmt. Man nehme zunächst vier Punkte o, a, b, c, so dass nicht zwei zusammenfallen und auch nicht drei in einer nämlichen Geraden liegen. In o lege man den Scheitel eines Strahlbüschels, ziehe oa, ob, oc und wähle von den noch zu Gebote stehenden Punkten drei weitere a′, b′, c′ auf diesen Strahlen, so dass

$$ao = oa' \quad bo = ob' \quad co = oc'.$$

Die zwei übrig bleibenden Punkte mögen nun gewählt werden wie man will, mit der blossen Einschränkung, dass keiner auf einem der drei Strahlen zu liegen komme. Die Curve wird hiemit bestimmt sein, und sie wird auch eine C_{III} sein, da o drei ihrer Sehnen halbirt.

Zweiter Beweis.

Die C_3 können bekanntlich auf folgende Weise erzeugt werden. Es sei ein Kegelschnittbüschel und ein Strahlbüschel gegeben, deren Gleichungen resp. seien:

$$K_1 + \lambda K_2 = 0. \qquad 1)$$

$$G_1 + \mu G_2 = 0. \qquad 2)$$

und es bestehe zwischen λ und μ eine ein-eindeutige Verwandtschaft vermöge einer bilinearen Gleichung

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0 \qquad 3)$$

Eliminirt man aus diesen Relationen die Parameter λ, μ, so folgt die Gleichung

$$AK_1G_1 - BK_1G_2 - CG_1K_2 + DG_2K_2 = 0. \qquad 4)$$

Dieses Erzeugniss der Grundgebilde erster Stufe 1) und 2) ist eine C_3, welche durch die Basispunkte des Kegelschnittbüschels und durch den Scheitel des Strahlbüschels geht. Wählt man die Verwandtschaft in ihrer einfachsten Form, nämlich $\lambda = \mu$, so wird die C_3 dargestellt durch:

$$K_1G_2 - K_2G_1 = 0.$$

Wir wollen nun von dieser allgemeinen Erzeugungsart Gebrauch machen, und zwar wollen wir die Verwandtschaft so festzusetzen suchen, dass das Erzeugniss beider Büschel eine C_{III} wird.

Der Scheitel des Strahlbüschels sei o. Es sei G_1 ein beliebiger Strahl durch o, so wird jeder Kegelschnitt des Kegelschnittbüschel von ihm in einem Punktepaar einer Involution geschnitten, nach dem Satz von Desargues. Nehmen wir nun an, man habe auf G_1 in irgend einer Weise eine zweite Punktinvolution bestimmt, die von der ersten ganz unabhängig sei. Die beiden Involutionen werden ein und nur ein gemeinsames Punktepaar haben.[1]) Es habe nun die Involution, welche das Kegelschnittbüschel auf G_1 erzeugt, die Gleichung

$$\alpha x_1x_2 + \beta(x_1 + x_2) + \gamma = 0. \qquad 1)$$

Die zweite Involution auf G möge einfach dadurch bestimmt sein, dass je einem Punkte p_1 ein Punkt p_2 zugeordnet sei in der Weise, dass

$$p_1o = op_2$$

sei. Die Gleichung dieser willkürlich gewählten Involution wird lauten

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad 2)$$

und hiebei sind unter x_1, x_2 wie bei 1) die Abscissen ent-

1) vgl. Weyr. Die Elem. der proj. Geom. I. Heft, p. 170.

sprechender Punkte bezüglich o als Anfangspunkt verstanden. Suchen wir das beiden Involutionen gemeinschaftliche Elementenpaar. Zu dem Ende haben wir 1) und 2) zu verbinden. Es wird

$$\alpha x_1 x_2 + \gamma = 0, \qquad 3)$$

2) und 3) sagen aber nichts anderes, als dass x_1, x_2 der rein quadratischen Gleichung

$$\alpha x^2 = \gamma$$

genügen. Aus dieser erhalten wir für die Abscissen der Punkte des gemeinschaftlichen Paares

$$x_1 = + \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \qquad x_2 = - \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Dieses Punktepaar ist das einzige, welches sowohl der willkürlich angenommenen Involution 2) angehört, als auch durch ein Element des Kegelschnittbüschels bestimmt wird. Ordnen wir nunmehr dem Strahle G_1 eben denjenigen Kegelschnitt K_1 in der Verwandtschaft zu, der dieses Punktepaar x_1, x_2 erzeugt. Dadurch wird G_1 zu einer Sehne, welche durch o halbirt erscheint. In genau derselben Weise operiren wir mit zwei weitern Strahlen G_2, G_3 des Büschels o, und ordnen ihnen resp. zwei Kegelschnitte K_2, K_3 zu, so dass sie ebenfalls als Sehnen betrachtet in o halbirt werden. Hiemit ist die projectivische Verwandtschaft festgestellt, zugleich aber auch erreicht, dass durch den Curvenpunkt o drei Sehnen halbirt werden; in dieser Weise erhalten wir als gesuchtes Erzeugniss eine C_{III}.

Wenn die Verwandtschaft einmal hergestellt ist, so können wir mit Leichtigkeit auch die Tangente im Mittelpunkt erhalten. Hiefür haben wir nur denjenigen Kegelschnitt zu nehmen aus denen des Büschels, der durch o geht, und in diesem Punkt an ihn die Tangente zu legen, so wird dieselbe auch die gesuchte Gerade sein.

Ein spezieller Fall soll hier noch angeführt werden. Derselbe ist aus dem Grunde von Wichtigkeit, weil wir später zeigen werden, dass jede C_{III} nach der in ihm enthaltenen Erzeugungsweise kann entstanden gedacht werden.

Den Kegelschnittbüschel nehmen wir als aus concentrischen Kegelschnitten bestehend an, also aus lauter Ellipsen, Hyperbeln sammt ihren degenerirenden Formen. Den Scheitel des Strahlbüschels legen wir in den gemeinsamen Mittelpunkt o der Elemente des ersten Büschels. Die Sache gestaltet sich nun sehr einfach, denn es genügt, die projectivische Verwandtschaft in irgend einer Weise durch Zuordnung dreier beliebiger Kegelschnitte zu drei beliebigen Strahlen festzustellen. Es ist ohne weiteres klar, dass jeder Strahl durch o ein Durchmesser sein wird, und dass die Curve einen Mittelpunkt haben wird.

Diese Entstehungsart der C_{III} ist als specieller Fall der vorhergehenden weniger allgemein, sie hat aber den Vorzug, dass, während bei der erstern die Verwandtschaft zwischen den beiden Büschel auf eine ganz specielle Weise gewählt werden musste, ihre Wahl hier an nichts gebunden ist, sondern der Willkür überlassen bleibt.

Sind die concentrischen Kegelschnitte insbesondere lauter Kreise, so fallen die vier Basispunkte des Büschels zu je zweien in die unendlich fernen imaginären Kreispunkte, und da alle Kreise denselben Mittelpunkt haben, so haben sie gemeinsame Asymptoten. Die Kreise müssen als ein Büschel sich in den unendlich fernen imaginären Kreispunkten berührender Kegelschnitte angesehen werden.

Dritter Beweis.

In der allgemeinen Theorie der C_3 wird folgende Aufgabe gelöst:[1])

Eine C_3 zu construiren, von welcher gegeben sind: drei in einer Geraden liegende Punkte a, a′, a″, die Tangenten A, A′, A″ in denselben, und die zu a und a′ zugehörigen Tangentialpunkte α, α', und endlich ein neunter Punkt k (Fig. 1).

1) Salmon. A treatise on higher plane curves.

Die Auflösung ist folgende: Der dritte Tangentialpunkt α'' von a'' wird als Schnitt von $\alpha\alpha'$ mit A'' gefunden. Man ziehe nun αk, suche den Schnittpunkt β dieser Geraden mit einem Kegelschnitt, der durch k geht und A', A'' in resp. a', a'' berührt. Es ist dann β ein Punkt von C_3. In ganz analoger Weise findet man β', β'' auf den Geraden $k\alpha'$ und $k\alpha''$. Indem man dann jeden der so gefundenen Punkte nach und nach an Stelle von k treten lässt und die nämliche Construction wiederholt, kann man so viel Curvenpunkte konstruiren als man will.

Diese Construction wollen wir folgendermassen specialisiren (Fig. 2). Wir nehmen die in gerader Linie liegenden Punkte a, a', a'' so an, dass sie der Bedingung genügen:

$$aa' = a'a''$$

und ferner nehmen wir A und A'' als parallel, während wir A' beliebig lassen, jedoch nicht mit der Geraden $a\,a'\,a''$ zusammenfallend. Dann legen wir noch α' in a' hinein und wählen α willkürlich auf A. Jetzt mache man die oben beschriebene Construction, indem man auf $k\alpha'$ den Punkt β' bestimmt. Dieser wird erhalten, indem man die Punkte $k \equiv 1$, $a \equiv 23$, $a'' \equiv 45$ als fünf Punkte eines Pascal'schen Sechsecks betrachtet und auf $k\,a'$ den sechsten Punkt $\beta' = 6$ ermittelt. Aus dieser Construction geht hervor, dass $k\alpha' = \alpha'\beta'$ wird. Nun brauchen wir nicht mehr weiter zu gehen, denn α' halbirt bereits die drei Sehnen $a\,a''$, $\alpha\,\alpha''$, $k\beta'$. Das Erzeugniss ist daher eine C_{III}, deren Mittelpunkt in α' liegt.

Vierter Beweis.

Hier geben wir noch zwei andere Constructionen, welche zugleich zeigen, dass es C_{III} gibt, welche drei reelle, sowie auch solche, welche nur eine reelle Asymptote haben.

In der allgemeinen Theorie löst man die Aufgabe:[1]) Gegeben sind drei Asymptoten A, A' A'', ihre [in gerader

1) Plücker. System der analyt. Geom. p. 167.

Linie liegenden] Schnittpunkte $\alpha, \alpha', \alpha''$ mit der Curve, und endlich ein Punkt k des Erzeugnisses (Fig. 1). Behufs der Lösung lege man durch k und α die Gerade, schneide mit derselben A', A'' resp. in r', r'', und mache auf k α selbst k r' = r'' β, so ist β ein Curvenpunkt. Ganz analog gewinnt man auf k α' und k α'' die Punkte β', β''. Lässt man dann β, β', β'' die Rolle von k übernehmen, und wiederholt man dieselbe Construction, so erhält man wieder neue Punkte u. s. w.

Die Bestimmungsstücke wählen wir so, dass $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha''$ und A parallel zu A'' wird (Fig. 3). A' lassen wir beliebig, mit der Bedingung jedoch, nicht mit $\alpha\alpha''$ zusammenzufallen. Macht man dann die Construction mit k α', so geht hervor, dass k $\alpha' = \alpha'\beta'$ sein muss. Man bestimme hierauf den Curvenpunkt β auf k α, verbinde ihn mit α' und ermittle auf $\beta\alpha'$ den Punkt β''. Dann wird $\beta\alpha' = \alpha'\beta''$ sein. Nunmehr hat die Curve drei Sehnen, die in α' halbirt erscheinen, und ist also eine C_{III}, die in α' ihren Mittelpunkt hat.

Gehen wir zu dem Fall über, dass nur eine reelle Asymptote vorhanden ist. Allgemein hat man folgende Aufgabe:[1])

Gegeben die reelle Asymptote A, ihr Schnitt α mit der Curve, ferner eine Ellipse K, deren imaginäre Asymptoten auch die der Curve seien, dann die Durchschnitte k k' von K mit der Curve [α k k' müssen in gerader Linie liegen] und endlich noch irgend ein Punkt m (Fig. 4).

Lösung: Man ziehe m k, m k', m α, schneide K und A:

mit k m resp. in p q und mache q m' = m p,

mit k'm resp. in p'q' und mache q'm'' = m p',

mit α m resp. in p''q'' und mache q''m''' = mp''.

Dann sind m' m'' m''' drei Curvenpunkte. Diese Punkte können dann wieder dazu dienen, um in derselben Weise die Construction fortzusetzen.

Wir specialisiren so, dass wir α in den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse legen, also dieselbe durch A halbiren. k, k' nehmen wir auf der Ellipse in den Enden eines Durch-

1) Plücker. System der analyt. Geom. p. 172.

messers, also wird $k\alpha = \alpha k'$. Den Punkt m lassen wir willkürlich gegeben sein. Auf $m\alpha$ construire man nach obiger Vorschrift m', so wird $m\alpha = \alpha m'$. Darauf ziehe man ebenso nach Vorschrift m k und suche darauf m''. Endlich bestimme man auf $m''\alpha$ den Punkt m''', so wird $m''\alpha = \alpha m'''$. Nun gehen schon drei Durchmesser durch α, somit ist das Erzeugniss eine C_{III} (Fig. 5).

§ 3.

Schreibt man die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung in der Form:

$$u_n + u_{n-1} + \cdots\cdots + u_1 + u_0 = 0,$$

wo $u_i = a_{i,0}x^i + a_{i-1,1}x^{i-1}\cdot y + \cdots\cdots + a_{1,i-1}xy^{i-1} + a_{0,i}y^i$

den Complex der Glieder erster Dimension darstellt, so genügen die unendlich fernen Punkte der Curve der Gleichung

$$u_n = 0$$

sei es, dass für sie beide oder nur eine Coordinate unendlich werde. Andererseits stellt $u_n = 0$ ein Complex von n Strahlen durch den Anfangspunkt der Coordinatenaxen. Schafft man zweitens in der gegebenen Curvengleichung durch Transformation des Axensystems das Glied u_0 fort, so stellt die Gleichung

$$u_1 = 0$$

die Tangente an die Curve im Coordinatenanfang dar. Letzteres gilt nur, wenn der betreffende Punkt weder Doppel- noch Rückkehrpunkt ist. Diese Fälle kommen bei unsern Untersuchungen aber nicht vor.

Erinnern wir uns an die früher gezeigte Entstehung einer C_{III} vermöge eines Büschels concentrischer Kreise und eines mit ihm concentrischen Strahlbüschels. Diese Büschel seien auf gewöhnliche Coordinatenaxen bezogen durch die Gleichungen:

$$(x^2 + y^2 - r_1^2) + \lambda (x^2 + y^2 - r_2^2) = 0 \qquad 1)$$

$$(y - \alpha_1 x) + \lambda (y - \alpha_2 x) = 0 \qquad 2)$$

gegeben, so lautet die Gleichung der Curve selbst

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(x^2 + y^2)x - r_1^2 (y - \alpha_2 x) + r_2^2 (y - \alpha_1 x) = 0.$$

Stellen wir nun die Gleichung $u_3 = 0$ auf, so ist sie

$$(x^2 + y^2)x = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x + iy)(x - iy)x = 0.$$

Sie enthält die unendlich fernen Punkte der C_{III} und stellt auch drei Gerade dar, welche durch den Mittelpunkt gehen. Man überzeugt sich leicht, dass diese Geraden die Asymptoten sind. z. B. die eine heisst $x = 0$. Derjenige Strahl des Büschels 2), welcher dieser Geraden entspricht, hat den Parameter $\lambda = -1$. Der Kegelschnitt, der ihr entspricht, ist also: $r_2^2 - r_1^2 = 0$.

Das ist aber der Ausdruck für die doppelt gezählte unendlich ferne Gerade der Ebene, welche selbst dem Büschel angehört. Da aber die doppeltgezählte unendlich ferne Gerade der y-Axe entspricht, so folgt, dass diese Axe eine Asymptote ist. Die beiden anderen Geraden sind die Asymptoten der concentrischen Kreise und gehen also durch die imaginären Kreispunkte, welche auf ihnen doppelt zu zählen sind. Es ist leicht einzusehen, dass für diese drei Asymptoten der Mittelpunkt der Curve ebenfalls Mittelpunkt ist. Wir können also den Satz aussprechen:

Ist eine C_{III} das Erzeugniss eines Büschels concentrischer Kreise und eines mit ihm concentrischen projectivischen Strahlbüschels, so sind ihre drei Asymptoten auch Durchmesser.

Will man endlich noch die Tangente im Mittelpunkt haben, so haben wir $u_1 = 0$ zu bilden, also:

$$r_2^2 (y - \alpha_1 x) - r_1^2 (y - \alpha_2 x) = 0.$$

Von ihr wissen wir, dass sie Wendetangente ist.

Von den Asymptoten wird in § 5 nochmals die Rede sein.

§ 4.

Es ist bekannt, dass für einen Wendepunkt einer C_3 die conische Polare in die Wendetangente und in eine zweite Gerade, die harmonische Polare des Wendepunkts, zerfällt. Bei einer C_{III} ist der Mittelpunkt ein Wendepunkt. Seine harmonische Polare fällt in's Unendliche, denn jede Sehne durch o schneidet C_{III} noch in zwei Punkten x_1, x_2, so dass $x_1 o = o x_2$. Daher muss der zu o bezüglich x_1, x_2 harmonisch conjugirte Punkt auf der Sehne im Unendlichen liegen. Hiemit gilt also der Satz:

Die harmonische Polare des Mittelpunkts einer C_{III} ist die unendlich ferne Gerade.

Eine C_3 ohne Doppelpunkte besitzt neun Wendepunkte, also auch neun harmonische Polaren bezüglich dieser Wendepunkte. Nun wollen wir eine C_3 nehmen und die Voraussetzung machen, dass die harmonische Polare eines ihrer Wendepunkte ω in's Unendliche falle. Legen wir in ω den Scheitel eines Strahlbüschels, so schneidet jeder Strahl die unendlich ferne Gerade in einem Punkt, der zu ω bezüglich der beiden Schnittpunkte x_1, x_2 mit der Curve harmonisch conjugirt ist. Daraus folgt, dass ω Mittelpunkt der Curve ist. Ferner sieht man ein, dass nur eine einzige solche harmonische Polare in's Unendliche fallen kann, denn eine C_{III} kann nicht mehr als einen Mittelpunkt haben. Wir erhalten somit den Satz:

Von den neun harmonischen Polaren der Wendepunkte einer C_3 kann eine und nur eine in's Unendliche fallen. Fällt aber eine in's Unendliche, so ist die Curve eine C_{III}, deren Mittelpunkt in dem zur unendlich fernen Geraden gehörigen Wendepunkt liegt.

Aus diesem Satz können wir für die C_3 eine hübsche Eigenschaft ableiten. Wenn wir eine beliebige C_3 aus einem Punkte des Raumes auf eine Ebene projiciren, so wird ihr Bild C'_3 wieder eine Curve von derselben Ordnung sein. Sei

ω ein Wendepunkt von C_3, so können wir die Projection stets so machen, dass die harmonische Polare von ω in's Unendliche projicirt wird. Der Wendepunkt bleibt ein solcher bei der Projection. C'_3 wird den Bedingungen des vorigen Satzes nun genügen, und wir können sagen:

Eine einfache C_3 kann stets durch die Operation des Projicirens aus einem Punkt des Raumes auf eine Bildebene in eine C_{III} verwandelt werden; und zwar kann dies auf unendlich viele Arten geschehen.[1])

Wenn also eine C_3 einen Mittelpunkt hat, so ist dieses eine rein metrische Eigenschaft und keine Invariante. Zu diesem Satz wollen wir noch den analytischen Beweis erbringen.

Die ursprünglich gegebene C_3 habe die Gleichung:

$$a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + \cdots\cdots + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0 \qquad 1)$$

Auf dieselbe wende man die lineare Transformation an:

$$x = \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}{\delta\xi + \varepsilon\eta + 1} \qquad y = \frac{\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'}{\delta\xi + \varepsilon\eta + 1} \qquad 2)$$

so entspricht vermöge derselben einem Punkt x, y der Ebene von C_3 ein Punkt ξ, η der Bildebene. Der Grad der Gleichung wird nicht geändert, und sie möge übergehen in:

$$A_{30}\xi^3 + A_{21}\xi^2\eta + \cdots\cdots + A_{10}\xi + A_{01}\eta + A_{00} = 0. \qquad 3)$$

Die Grössen A_{ik} hängen von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \beta' \gamma', \delta, \varepsilon$ ab. Diese letztern nun können wir stets so wählen, dass in 3) die Glieder gerader Dimension in ξ und η wegfallen. Das gibt also folgende Bedingungen:

$$A_{20} = 0, \quad A_{11} = 0, \quad A_{02} = 0, \quad A_{00} = 0.$$

Diese sind vier an der Zahl, also weniger als die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \delta, \varepsilon$. Darin liegt es auch, dass die Projection auf unendlich viele Arten gemacht werden kann.

1) vergl. Steiner. Die früher zitirte Abhandlung.

§ 5.

Zur Bestimmung einer allgemeinen C_3 sind neun Punkte nothwendig und hinreichend. Wenn es sich um die Bestimmung einer C_{III} handelt, und wenn unter den willkürlich zu wählenden Punkten auch der Mittelpunkt als solcher figurirt, so kann man sich fragen, wie viel gewöhnlichen Punkten er äquivalent ist.[1])

Der gegebene Mittelpunkt sei o. Nehmen wir ferner einen Punkt a an, so wird auf o a der Punkt a′ als diametral-gegenüberliegender zugleich damit gegeben erscheinen, so dass also die Wahl eines willkürlichen Punktes ausser o selbst schon einen dritten mit bestimmt. Dasselbe gilt für zwei weitere willkürliche Punkte b, c, welche ihre diametral-gegenüberliegenden b′, c′ bedingen. Es gehen nunmehr durch o drei Sehnen, welche in o halbirt werden, und wie wir auch die übrigen willkürlichen Punkte d und e wählen mögen, so wird das Erzeugniss eine C_{III} sein. Wir haben also die erforderlichen neun Punkte gewählt. Von diesen sind aber ausser o nur fünf Punkte willkürlich, nämlich a, b, c, d, e. Also ist die Angabe des Mittelpunkts selbst gleichwertig der Angabe von $9 - 5 = 4$ einfachen Punkten:

Eine C_{III} ist durch ihren Mittelpunkt und fünf weitere Punkte bestimmt, oder es gilt bei der Bestimmung der C_{III} durch Punkte der Mittelpunkt ebensoviel als vier einfache Punkte.

Geben wir den Mittelpunkt o und die Wendetangente in ihm, so zählt diese letztere für eine Bedingung, und wir können den Satz aussprechen:

Eine C_{III} ist bestimmt, wenn man ihren Mittelpunkt, die Mittelpunktstangente und vier weitere Punkte kennt.

Den vorhergehenden Satz wollen wir noch analytisch beweisen. In homogenen Coordinaten habe die C_{III} die Gleichung

$$u \quad u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

1) vergl. Steiner. Die schon zitirte Abhandlung.

Soll nun ein Punkt (x'_1, x'_2, x'_3) auf ihr liegen, so erhalten wir

$$u\,(x'_1, x'_2, x'_3) = 0 \qquad 1)$$

als eine erste Bedingung. Ist dieser Punkt dazu noch Wendepunkt, so liegt er auf der zu $u = 0$ gehörenden Hesse'schen Curve. Bezeichnen wir symbolisch:

$$u_{r,s} = \frac{d^2u}{dx_r \,.\, dx_s}, \quad \text{wobei } u_{r,s} = u_{s,r}$$

so muss in Folge dessen der betreffende Punkt der Gleichung genügen:

$$H\,(x'_1, x'_2, x'_3) \equiv \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}_{x_i = x'_i} = 0. \qquad 2)$$

Ferner soll unser Punkt der Mittelpunkt sein. Nun degenerirt die conische Polare eines Wendepunkts in die Wendetangente und in eine zweite Gerade, welche letztere in's Unendliche fällt, wenn der Wendepunkt ein Mittelpunkt ist. Die Gleichung dieser zweiten Geraden sei etwa:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

wobei a, b, c Functionen von $x'_1\, x'_2, x'_3$ sind. Soll diese Gerade in's Unendliche fallen, so muss

$$a = 0 \quad 3) \qquad \text{und} \qquad b = 0 \qquad 4)$$

sein. Jetzt haben wir in 1), 2), 3), 4) diejenigen Bedingungen, welche mit der Angabe des Mittelpunkts verbunden sind, und das übrige versteht sich von selbst. Hiemit haben wir auch den analytischen Beweis unseres Satzes erbracht.

Wir wollen nun eine C_{III} wirklich construiren mit einem gegebenen Mittelpunkt o und fünf anderen Punkten a, b, c, d, e. Auf oa trage man $a'o = oa$ und auf ob die Strecke $b'o = ob$ ab. Man betrachte a, b, a', b' als die Basis eines Kegelschnittbüschels. Unter diesen Kegelschnitten können blos solche mit einem Mittelpunkt vorkommen, denn sie haben alle zwei Sehnen, die in o halbirt sind. Nun construire man die Kegelschnitte K_c, K_d, K_e, welche resp. durch c, d, e gehen und dem Büschel angehören. Machen wir o zum Scheitel

eines Strahlbüschels, welches wir mit dem vorigen Büschel dadurch in projectivische Verwandtschaft setzen, dass wir den Elementen K_c, K_d, K_e, des einen, die Elemente oc, od, oe des andern zuordnen. Damit ist die Verwandtschaft bestimmt, und das Erzeugniss ist eine C_{III}. Diese Erzeugung kommt nun auf dasselbe hinaus, wie die auf Seite 13 gemachte. Hier sehen wir aber, dass sie allgemein für die C_{III} angeschaut werden kann, und die damals gemachte Bemerkung ist jetzt gerechtfertigt, d. h. Jede C_{III} kann als das Erzeugniss eines Büschels concentrischer Kegelschnitte und eines mit ihm concentrischen Strahlbüschels betrachtet werden.

Nachdem wir gesehen haben, dass es in der Natur der allgemeinen C_{III} liegt, auf eine verhältnissmässig einfache Entstehungsweise zurückgeführt werden zu können, wollen wir trachten, auch ihre Gleichung möglichst zu vereinfachen.

Die allgemeine Form der C_{III} in Bezug auf ein Axensystem durch ihren Mittelpunkt ist in cartesischen rechtwinkligen Coordinaten

$$u_3 + u_1 = 0 \qquad 1)$$

wo u_i den Complex der Glieder i^{ter} Dimension bedeutet. Von sechs Gliedern, die sie enthält, können wir eines folgendermassen wegschaffen. Macht man die Mittelpunktstangente nämlich zur x-Axe, so hat man folgendes: Diese Tangente lautet im ursprünglichen System

$$u_1 - a_{10}x + a_{01}y = 0.$$

Ihr Winkel α gegen die x-Axe ist gegeben durch

$$tg\alpha = -\frac{a_{10}}{a_{01}}$$

Drehen wir nun das Axensystem um α, indem wir es seinen Anfangspunkt beibehalten lassen, so wird an 1) wesentlich nichts geändert. Nach der Drehung ist die Tangente die x-Axe selbst und heisst etwa

$$b_{01}y = 0$$

mit andern Worten: es fällt das Glied mit der ersten Potenz von x heraus, und die Gleichung lautet:

$$b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + b_{01}y = 0. \qquad 2)$$

In derselben Weise hätte man, statt das Glied mit x fortzuschaffen, dasjenige mit y wegräumen können.

Wenn wir ein schiefwinkliges Axensystem zulassen, dessen x-Axe mit der für 2) geltenden x-Axe identisch ist, und dessen y-Axe durch eine Asymptote gebildet wird, so können wir noch ein weiteres Glied wegschaffen. In 2) sind die drei Asymptoten in dem Ausdruck

$$b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 = 0$$

enthalten. Soll eine von ihnen die y-Axe bilden, so muss durch $x = 0$ dieser letzten Gleichung genügt werden können. Dies kann aber nur der Fall sein, wenn $b_{03} = 0$ ist, d. h. wenn das Glied mit y^3 fehlt. Demnach ist die Gleichung unserer Curve im neuen Axensystem

$$c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{01}y = 0 \qquad 3)$$

Es ist selbstverständlich, dass man auch hier durch Vertauschung der x- mit der y-Axe das Glied, welches x^3 enthält, hätte wegbringen können, statt desjenigen mit y^3.

In diesen Gleichungen 2) und 3) sind x und y nicht gleichberechtigt. Um diese Bevorzugung aufzuheben, haben wir aber folgendes Mittel. Zwei Asymptoten nehmen wir als Coordinatenaxen. Wenn

$$u_3 + u_1 = 0$$

die Gleichung der Curve in ihrer allgemeinen Gestalt ist, so sind die drei Asymptoten enthalten in

$$u_3 = 0.$$

Sollen hierin x und y als Factoren nun auftreten, wie es ja die Wahl unserer Axen erfordert, so muss

$$u_3 = xy\ (a_{21}x + a_{12}y)$$

sein. Der Klammerausdruck gleich Null gesetzt, liefert die dritte Asymptote. Unsere Gleichung aber lautet:

$$xy(a_{21}x + a_{12}y) + a_{10}x + a_{01}y = 0 \qquad 1)$$

und zeichnet sich durch vollkommene Gleichberechtigung der Variablen aus.

Wir haben erkannt, dass jede C_{III} als Erzeugniss eines gewissen Büschels von concentrischen Kegelschnitten und eines mit ihm concentrischen projectivischen Strahlbüschels kann angesehen werden. Daraus haben wir dann die Form der Gleichung abgeleitet.

Man muss nun umgekehrt auch zeigen können, dass die Gleichung 1) nichts anderes ist, als das Erzeugniss zweier Büschel der eben besagten Art. Schreiben wir 1) in Determinantenform:

$$\begin{vmatrix} xy & -1 \\ a_{10}x + a_{01}y & a_{21}x + a_{12}y \end{vmatrix} = 0$$

so erkennt man die Sache sofort daraus. Das Kegelschnittbüschel lautet nämlich:

$$xy - \lambda = 0 \qquad 3)$$

und das Strahlbüschel, welches mit ihm projectivisch ist,

$$a_{10}x + a_{01}y + \lambda(a_{21}x + a_{12}y) = 0. \qquad 4)$$

3) besteht aber aus Kegelschnitten mit denselben Asymptoten. Die zu Grund liegenden Elemente sind einerseits die beiden Axen, andererseits die doppeltgezählte unendlich ferne Gerade. Die Basispunkte liegen zu je zweien vereint in den unendlich fernen Punkten der Axen, und alle Kegelschnitte des Büschels müssen als sich in diesen Punkten doppelt berührende aufgefasst werden. — 4) enthält das Strahlbüschel, und die beiden Grundstrahlen desselben haben als Schnittpunkt $x = 0$, $y = 0$. Die beiden projectivischen Gebilde sind daher concentrisch, und der Beweis ist geleistet.

Im vierten Beweis für die Existenz von C_{III} haben wir eine solche construirt, welche zwei parallele Asymptoten besass, die nicht alle durch den Mittelpunkt gingen. Andererseits wissen wir, dass im Allgemeinen die Asymptoten einer Curve mit Mittelpunkt durch diesen letzteren hindurch gehen. Es wird daher gut sein, diese Sache etwas zu prüfen.

Sei eine Asymptote die y-Axe, und die Wendetangente im Mittelpunkt die x-Axe. Dann lautet die Curvengleichung, wie wir es bereits gesehen haben:

$$xy^2 + ax^2y + bx^3 + cy = 0. \qquad 1)$$

Ist nun ganz allgemein $y = f(x)$ eine Curvengleichung, und soll ein Strahl $\eta = m\xi + p$ eine Asymptote sein, die nicht zur y-Axe parallel ist, so werden m und p durch

$$m = \lim_{x = \infty} \frac{y}{x}$$

$$p = \lim_{x = \infty} (y - mx)$$

gegeben. Lösen wir also 1) nach y auf:

$$y = \frac{-(ax^2 + c) \pm \sqrt{(ax^2 + c)^2 - 4bx^4}}{2x}$$

so wird $$m = \lim \frac{y}{x} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

In schiefwinkligen Axen, wie wir sie haben, ist die Bedeutung von m gegeben durch:

$$m = \frac{\sin \alpha}{\sin(\vartheta - \alpha)} = \frac{1}{\sin \vartheta \operatorname{cotg} \alpha - \cos \vartheta}$$

wo ϑ den Winkel zwischen den Axen und α denjenigen zwischen der x-Axe und der Geraden bedeuten.

Durch Substitution dieses Werthes in 2) erhalten wir

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{2}{(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}) \sin \vartheta} + \operatorname{cotg} \vartheta$$

Hieraus ersieht man, dass α im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe enthält, und dass die beiden entsprechenden Asymptoten einander nicht parallel sind.

Die im Beweise 4 figurirende C_{III} ist schon ein ganz specieller Fall, nämlich derjenige, wobei $a^2 = 4b$ ist. Denn es sind alsdann die beiden Asymptoten parallel. Für diese Curve wird

$$p = \lim (y - mx) = \pm \sqrt{2ac}$$

d. h.: Wenn eine C_{III} zwei parallele Asymptoten hat, so werden dieselben durch den Mittelpunkt getrennt und stehen von ihm gleich weit ab.

Die Gleichung einer solchen Curve ist sehr einfach; wir erhalten sie, indem wir in 1) $a^2 = 4b$ machen, was die Relation liefert:

$$x\,(y + \frac{a}{2}x)^2 + cy = 0$$

oder allgemeiner:

$$x\,(y + sx)^2 + ty = 0.$$

---

§ 6.

Die allgemeine Gleichung einer C_3 sei in homogenen Coordinaten wie früher

$$u \equiv u\,(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und es sei $u_{ik} = \dfrac{d^2u}{dx_i \cdot dx_k}$, wobei $u_{ik} = u_{ki}$

Betrachtet man nun irgend eine Gerade G in der Ebene, und bestimmt man zu jedem ihrer Punkte die gerade Polare bezüglich C_3, so umhüllen sie einen Kegelschnitt, welcher den Namen der Poloconik[1]) (Lineopolar-Enveloppe) von G trägt und dessen Gleichung lautet:

$$\Pi_G \quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ a_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ a_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0$$

wenn $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$

die Gleichung von G ist. Nehmen wir jetzt C_3 als C_{III} in der Form an, wo die x-Axe die Wendetangente im Centrum ist:

$$\alpha x_1^3 + \beta x_1^2 x_2 + \gamma x_1 x_2^2 + \delta x_2^3 + \varepsilon x_2 x_3^2 = 0,$$

1) Cremona, Introduzione ad una teoria geom. delle curve piane.

so werden die Ausdrücke u_{ik} sein:

$$u_{11} = 6\alpha x_1 + 2\beta x_2 \qquad u_{22} = 2\gamma x_1 + 6\delta x_2 \qquad u_{33} = 2\varepsilon x_2$$
$$u_{12} = 2\beta x_1 + 2\gamma x_2 \qquad u_{13} = 0 \qquad u_{23} = 0.$$

Die Gerade G falle in's Unendliche. Dazu ist erforderlich, dass $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ werde. Dann aber wird die Poloconik der unendlich fernen Geraden

$$(3\alpha x_1 + \beta x_2)(\gamma x_1 + 3\delta x_2) = (\beta x_1 + \gamma x_2)^2,$$

welches einen Kegelschnitt darstellt, der in zwei Gerade durch den Mittelpunkt der C_{III} zerfällt, d. h.: Die Poloconik der unendlich fernen Geraden bezüglich einer C_{III} zerfällt in zwei Gerade, welche durch den Mittelpunkt gehen.

Fällt aber die Gerade G mit der Wendetangente im Mittelpunkt von C_{III} zusammen, also mit unserer x-Axe, so wird die Poloconik ebenfalls in zwei Gerade zerfallen. Die x-Axe ist $x_2 = 0$, also haben wir in der Gleichung von Π $a_1 = 0$ und $a_3 = 0$ anzunehmen. Es wird dadurch

$$x_2(3\alpha x_1 + \beta x_2) = 0$$

d. h.: Die Poloconik der Wendetangente im Mittelpunkt einer C_{III} besteht aus zwei im Mittelpunkt sich schneidenden Geraden, deren eine die Wendetangente selbst ist.

Behufs der Construction dieser Poloconiken bemerken wir, dass, wenn a, b, c drei in einer Geraden G liegende Punkte einer C_3 sind, und man legt in denselben die Tangenten an die Curve, welche sich gegenseitig in α, β, γ schneiden, dann die Poloconik von G ein dem Dreieck $\alpha\beta\gamma$ eingeschriebener Kegelschnitt ist (Fig. 6). Dieser ist so beschaffen, dass seine Berührungspunkte l, m, n zu den Punkten a, b, c in Bezug auf die Ecken $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ des Tangentendreiecks harmonisch sind.[1]) Liegt G im Unendlichen, und hat C_{III} drei reelle Asymptoten, wovon zwei einander parallel sind, so besteht das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ aus zwei parallelen Seiten und einer Trans-

1) Salmon, A treatise on higher plane curves p. 152.

versalen. Wie man leicht sieht, besteht dann der Kegelschnitt aus zwei Geraden, die sich im Halbirungspunkt des von den beiden parallelen Asymptoten auf der dritten gebildeten Abschnittes schneiden. Eine ist parallel den zwei unter sich parallelen Asymptoten, während die zweite mit der dritten Asymptote zusammenfällt. — Hat C_{III} nur eine reelle Asymptote, so wird eine Gerade imaginär, die andere fällt mit der reellen Asymptote zusammen.

Hieran schliessen wir noch eine Bemerkung. In der allgemeinen Theorie wird gezeigt, dass, wenn die Poloconik einer Geraden G aus zwei in einem Punkt m sich schneidenden Geraden besteht, die conische Polare von m dann ebenfalls aus zwei Geraden besteht, deren eine mit G identisch ist. Der umgekehrte Satz gilt ebenfalls.[1])

Dieses stimmt auch vollständig mit dem eben gefundenen, denn wie wir sahen, besteht die Poloconik der unendlich fernen Geraden aus zwei Geraden, welche durch den Mittelpunkt der C_{III} gehen. Andererseits ist uns bekannt, dass die conische Polare des Mittelpunktes einer C_{III} in zwei Gerade zerfällt, deren eine in die unendlich ferne Gerade fällt.

Wir wollen noch sehen, wie es sich bei den C_{III} mit dem sogenannten Gegenpunkt eines Punktquadrupels verhält. Man lernt in der allgemeinen Theorie, dass man zu vier beliebigen Punkten einer C_3, etwa zu a, b, c, d, stets einen fünften m eindeutig bestimmen kann, der die Eigenschaft hat, dass C_3 aufgefasst werden kann als das Erzeugniss des durch a b c d bestimmten Kegelschnittbüschels und des durch m bestimmten Strahlbüschels. m heisst der Gegenpunkt des Punktquadrupels.

Nun wollen wir auf einer beliebigen C_{III} als Basispunkte des Kegelschnittbüschels zwei Paare von je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten a, a′ und b, b′ annehmen. Um den Gegenpunkt zu finden, haben wir irgend einen Kegelschnitt des Büschels mit C_{III} zum Schneiden zu bringen. Diese zwei Schnittpunkte (ausser a, b, a′, b′) seien x, x′. Dann

1) Durège, Ebene Curven dritter Ordnung. S. 186.

hat man $\overline{x\,x'}$ zu ziehen und den Schnitt dieser Geraden mit C_{III} zu suchen. Es sind aber alle Kegelschnitte concentrisch, wie wir es schon öfters erwähnt haben, und da o Mittelpunkt ist, sowohl der Curve als der Kegelschnitte, so hat man $x\,o = o\,x'$. Die beiden Schnittpunkte sind also wieder diametrale Punkte der Curve, und der dritte Schnittpunkt von $\overline{x\,x'}$ fällt in den Punkt o, d. h.: Besteht auf einer C_{III} ein Punktquadrupel aus zwei Paaren diametral gegenüberliegender Punkte, so ist der Mittelpunkt der Curve auch Gegenpunkt des Quadrupels.

Lässt man die vier Punkte des Quadrupels so zusammenfallen, dass sie einfach in zwei diametral einander gegenüberliegende übergehen, so weiss man, dass der Gegenpunkt des Quadrupels identisch wird mit dem Tangentialpunkt des dritten Schnittpunktes der Verbindungslinie der beiden Punkte des Quadrupels mit der Curve. Daraus geht abermals hervor, dass die Tangente im Mittelpunkt eine Wendetangente ist.

Noch einfacher wären wir zu dem obigen Satze gekommen, wenn wir, statt irgend einen Kegelschnitt des Büschels zu nehmen, einfach die beiden in o sich schneidenden Geraden a a′, b b′ genommen hätten. Die Schnittpunkte dieses zerfallenden Kegelschnittes mit C_{III} ausser a, a′, b, b′ fallen in o zusammen, und ihre Verbindungslinie ist die Tangente in o. Der dritte Schnittpunkt dieser mit der Curve ist wieder o, denn o ist Wendepunkt. Hiemit erscheint der obige Satz wiederum bewiesen.

Diesen Satz wollen wir nun anwenden. Denken wir uns die Punkte a mit b und a′ mit b′ zusammenfallend, d. h. lassen wir unser Kegelschnittbüschel, welches die Basispunkte a, a′, b, b′ hat, sich in ein solches verwandeln, welches nur noch zwei, aber doppelt zu zählende Basispunkte hat. Alsdann besteht der Kegelschnittbüschel aus lauter in a und a′ sich doppelt berührender Ellipsen und Hyperbeln, und o bleibt immer noch Gegenpunkt. Wir wissen nun, dass jeder Kegelschnitt, der ebenfalls in a und a′ die C_{III} berührt, oder mit andern Worten, der dem Büschel angehört, die C_{III} noch

in zwei weitern Punkten trifft, die ebenfalls diametral gegenüberliegende Punkte sind. Wählen wir als solchen Kegelschnitt die Geraden a b und a′ b′, oder also die Tangenten in a und a′, so müssen ihre Tangentialpunkte α und α' diametral einander gegenüberliegen, so dass $\alpha o = o \alpha'$ ist. Dies gibt nun den Satz:

Legt man in den Endpunkten eines Durchmessers einer C_{III} die Tangenten an die Curve, so sind die beiden entstehenden Tangentialpunkte ebenfalls Endpunkte eines Durchmessers.

Ferner geht unmittelbar daraus hervor der Satz:

Die Tangenten in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten einer C_{III} sind parallel wie bei den Kegelschnitten.

Der letzte Satz kann noch einfacher bewiesen werden, was wir bei den Wendepunkten sehen werden.

Aus diesen Betrachtungen folgt aber, dass die sich in a und a′ doppelt berührenden Kegelschnitte alle concentrisch sind in o. Also:

Alle Kegelschnitte, welche in den Endpunkten eines Durchmessers einer C_{III} die Curve berühren, bilden ein Büschel concentrischer Kegelschnitte, und ihr gemeinsamer Mittelpunkt fällt mit demjenigen von C_{III} zusammen.

Dass die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers parallel sind, und dass ihre Tangentialpunkte auf einem Durchmesser liegen, können wir auch analytisch zeigen. Jede C_{III} kann, wie wir gezeigt haben, die Form annehmen:

$$u \equiv a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{01}y = 0. \qquad 1)$$

Die Tangente in x, y lautet:

$$(\xi - x)\frac{du}{dx} + (\eta - y)\frac{du}{dy} = 0$$

oder

$$\eta = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}\xi + \left(x\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} + y\right). \qquad 2)$$

Schreiben wir sie abgekürzt:

$$\eta = -A\xi + B. \qquad 3)$$

Bilden wir die angedeuteten Differentialquotienten, so erhält man

$$A = \frac{3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2}{a_{21}x^2 + 2a_{12}xy + 3a_{03}y^2 + a_{01}} \qquad 4)$$

$$B = Ax + y. \qquad 5)$$

Aus 4) ist ersichtlich, dass A unverändert bleibt, wenn an Stelle des Punktes (x, y) sein diametraler (−x, −y) tritt. Die beiden Tangenten sind also parallel.

Aus 3) sieht man, dass beim Uebergang vom Punkte (x, y), zu (−x, −y) die Grösse B ihr Zeichen wechselt. Die Abschnitte, welche die beiden Tangenten auf der y-Axe erzeugen, sind also gleich und entgegengesetzt. Daraus folgt, dass die Tangentialpunkte auf einem Durchmesser liegen, denn sei (α, β) der Tangentialpunkt von (x, y), so genügt er sowohl

$$u(\alpha, \beta) = 0,$$

als auch

$$\eta = -A_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}\xi + B_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}$$

Der Punkt (−α, −β) genügt den Gleichungen:

$$u(-\alpha, -\beta) = 0$$

und: $\eta = -A_{\substack{x=-\alpha \\ y=-\beta}}\xi + B_{\substack{x=-\alpha \\ y=-\beta}} = -A_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}\xi - B_{\substack{x=\alpha \\ y=\beta}}$

d. h. dass dieser Punkt (−α, −β) der Tangentialpunkt von (−x, −y) sein muss.

Wir können noch analytisch zeigen, dass der Büschel der in (x, y) und (−x, −y) sich doppelt berührender Kegelschnitte auch ein Büschel concentrischer Kegelschnitte ist. Er habe die Form

$$K_1 + \lambda K_2 = 0. \qquad 1)$$

K_1 und K_2 wollen wir passend wählen. Die beiden Tangenten in (x, y) und in (−x, −y) sollen K_1 darstellen. Sie haben beide die Form 3) von vorher und unterscheiden sich bloss im Zeichen ihrer bekannten Glieder. Wir können also setzen:

$$K_1 \equiv (\eta + A\xi + B)(\eta + A\xi - B) = 0,$$

$$K_1 \equiv (\eta + A\xi)^2 - B^2 = 0. \qquad 2)$$

Als Kegelschnitt K_2 nehmen wir die doppelt gezählte Gerade, welche (x, y) mit $(-x, -y)$ verbindet. Ihre Gleichung lautet

$$K_2 \equiv (x\eta - y\xi)^2 = 0. \qquad 3)$$

Der Büschel 1) lautet:

$$(\eta + A\xi)^2 - B^2 + \lambda (x\eta - y\xi)^2 = 0, \qquad 4)$$

und er ist nun von solcher Natur, dass, wenn (x, y) seine Gleichung befriedigt, auch $(-x, -y)$ sie erfüllt. Die Kegelschnitte haben daher einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt in o.

§ 7.

Schenken wir noch den Wendepunkten unsere Aufmerksamkeit. Eine C_3 hat neun Wendepunkte, welche zu je dreien auf einer Geraden liegen. Im Falle wir eine C_{III} haben, so wissen wir, dass einer in den Mittelpunkt fällt, und es müssen daher die übrigen acht sich in vier Gruppen zu je zweien theilen, welche die Endpunkte von vier Durchmessern bestimmen. Sind also 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 unsere Wendepunkte und 0 zugleich der Mittelpunkt, so liegen 3, 4, 5, 6, 7, 8 auf einem Kegelschnitt, wenn 0, 1, 2 auf einer Geraden sind. Dieser Kegelschnitt ist mit der C_{III} concentrisch. Seien nämlich 3, 5, 7 resp. diametral gegenüberliegend zu 4, 6, 8. Durch 3, 4, 5, 6, 7 ist ein Kegelschnitt bestimmt; derselbe hat in 0 einen Mittelpunkt, da $\overline{34}$, $\overline{56}$ zwei Durchmesser bilden. Der Punkt 8, der zu 7 diametral gegenüberliegt, gehört also nicht nur C_{III} an, sondern auch dem Kegelschnitt. Daher können wir dies folgendermassen formuliren:

Zieht man durch den Mittelpunkt einer C_{III} einen Durchmesser, welcher die Curve in zwei diametral gegenüberliegenden Wendepunkten trifft, so liegen die übrigen sechs Wendepunkte auf einer Ellipse oder Hyperbel, deren Mittelpunkt im Mittelpunkt der Curve liegt.

Ferner ist auch sofort folgender Satz evident:

Vier Wendepunkte bilden die Ecken eines Parallelogrammes, dessen Mittelpunkt in denjenigen der Curve fällt.

Die vier Wendepunkte, welche die Ecken dieses Parallelogramms bilden, seien 1, 2, 3, 4, wobei 1 und 2, 3 und 4 je einander gegenüberliegen. 0 sei der Mittelpunkt. Nun muss die Verbindungslinie je zweier Wendepunkte immer noch einen dritten enthalten, also muss auf jeder Seite des Parallelogramms noch ein dritter Wendepunkt liegen. Also liegen die vier übrigen auf der Begrenzung des Parallelogramms, d. h. die Wendepunkte einer C_{III} liegen auf der Begrenzung eines Parallelogramms, mit Ausnahme desjenigen, der zugleich Curvenmittelpunkt ist und in den Mittelpunkt des Parallelogramms fällt.

Für die allgemeine C_3 zeigt man, dass die neun Wendepunkte auf zwölf Geraden liegen, von denen jede drei Wendepunkte enthält. Durch jeden Wendepunkt gehen vier solche Geraden, und derartige Gruppen von vier Geraden gibt es drei. In unserm Fall gehen durch den Mittelpunkt vier dieser Geraden, die übrigen acht gruppiren sich in Folge des vorigen Satzes in vier Paare von je zwei Parallelen.

Wir sagten anlässlich des Satzes, dass die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers einer C_{III} parallel sind, dass wir dafür noch einen Beweis im Kapitel über die Wendepunkte erbringen wollten. Dieses soll hier geschehen. In der allgemeinen Theorie der C_3 lernt man, dass, wenn ω ein Wendepunkt ist, und man durch ihn irgend eine Sehne legt, welche ausser in ω die Curve in a und b schneidet, die Tangenten in a und b an die Curve sich auf der harmonischen Polare des Wendepunktes schneiden.[1])

Wenn wir das auf die C_{III} anwenden, so ist der Wendepunkt als Mittelpunkt zu betrachten. Die Sehne a b wird zu

1) Maclaurin, De linearum geometricarum proprietatibus. p. 232. Uebersetzt von Jonquières.

einem Durchmesser, und da die harmonische Polare des Mittelpunkts ganz im Unendlichen liegt, so müssen die Tangenten in a und b parallel sein. q. e. d.

Die Hesse'sche Curve einer C_{III} ist jedenfalls eine C_3. Ihre Schnittpunkte mit der Grundcurve müssen Wendepunkte sein, denn unsere C_{III} hat keinen Doppelpunkt und keinen Rückkehrpunkt. Bei C_{III} sind also alle neun Schnittpunkte mit der zugehörigen Hesse'schen Curve Wendepunkte. Also gehen durch den Mittelpunkt der C_{III} vier Durchmesser, welche auch der Hesse'schen Curve angehören, und daher ist dieselbe auch eine C_{III}. (Drei Durchmesser hätten schon genügt.) Wir erhalten den Satz:

Die Hesse'sche Curve einer C_{III} ist selbst wieder eine C_{III} und hat mit ihr den Mittelpunkt gemein.

Geben wir zu diesem Satz auch den analytischen Beweis. Nehmen wir die Gleichung der gegebenen C_{III} in der uns schon bekannten Form, wo die x-Axe Tangente im Mittelpunkt ist, so lautet sie nach Einführung homogener Coordinaten:

$$ax_1^2 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^2 + ex_2x_3^2 = 0.$$

Rechnen wir die Grössen u_{ik}, deren Bedeutung wir kennen, und führen wir sie in die Gleichung der Hesse'schen Curve ein, so erhält man nach gehöriger Vereinfachung das Resultat:

$$H(u) \quad (3ax_1 + bx_2)\begin{vmatrix} cx_1 + 3dx_2 & x_3 \\ cx_3 & x_2 \end{vmatrix} + (bx_1 + cx_2)\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ bx_1 + cx_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus sieht man schon, da jedes Glied nach der Entwicklung der Determinanten von der dritten Dimension wird, dass man es mit einer C_{III} zu thun hat, deren Mittelpunkt im Anfangspunkt des Axensystems liegt, also mit demjenigen der ursprünglichen Curve identisch ist.

§ 8.

Seien a, b, c, d die Basispunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft[1]), p, q, r ihre Hauptpunkte und y der vermöge dieser Verwandtschaft einem beliebigen Punkte x entsprechende Punkt (Fig. 7).

Wenn x eine Curve n^{ter} Ordnung C_n beschreibt, so durchläuft y eine Curve $2n^{ter}$ Ordnung C_{2n}, welche durch die Hauptpunkte geht und in ihnen je einen n-fachen Punkt besitzt. Geht nun C_n selbst schon durch die Hauptpunkte, so zerfällt die entsprechende C_{2n} in die drei Seiten des Hauptdreiecks p, q, r und in eine einfache C_{2n-3}, die in p, q, r je einen (n—2)-fachen Punkt besitzt.

Es soll nun x eine C_{III} beschreiben, deren Mittelpunkt in einem der Hauptpunkte, etwa in p, liege, und die durch q und r gehe. Die Aufgabe, die wir uns stellen, ist, zu sehen, was y für eine Curve beschreibt. Sieht man von den drei Geraden ab, welche einen ihrer Bestandtheile bilden, so wird sie eine C_3 sein, und es liegt nahe, zu vermuthen, sie könnte auch einen Mittelpunkt haben. Es soll p q r als Fundamentaldreieck für homogene Coordinaten genommen werden, und zwar sollen in p die Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zusammenstossen. Die Gleichung der C_{III}, welche x unter den eben gemachten Voraussetzungen beschreiben soll, wird lauten:

$$a_{30}x_1^3 + a_{03}x_2^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + (a_1x_1 + a_2x_2)x_3^2 = 0$$

da p Mittelpunkt ist. Da ihr aber auch durch die Werthepaare $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ genügt werden soll, so müssen $a_{30} = 0$ und $a_{03} = 0$ sein. Es beschreibt also x die C_{III} von der Form:

$$C_{III} \equiv a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + (a_1x_1 + a_2x_2)x_3^2 = 0$$

oder:

$$C_{III} \equiv x_1x_2(a_{21}x_1 + a_{12}x_2) + (a_1x_1 + a_2x_2)x_3^2 = 0. \qquad 1)$$

---

1) Steiner, Systemat. Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. S. 254.

Schröter, Steiner's Vorlesungen. 1867, S. 316.

Um nun zu x den entsprechenden Punkt y zu finden, hat man einfach zwei beliebige Kegelschnitte des Büschels herauszugreifen, in Bezug auf dieselben zu x die Polaren zu suchen und dann diese letztern zum Schneiden zu bringen. Dieser Schnittpunkt ist y. Nimmt man nun das Hauptdreieck als Fundamentaldreieck, so haben irgend zwei Kegelschnitte des Büschels die Gleichungen:

$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 0$$
$$n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + n_3 x_3^2 = 0$$

Die Polaren von x bezüglich diesen beiden lauten in Veränderlichen y ausgedrückt:

$$m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3 = 0$$
$$n_1 x_1 y_1 + n_2 x_2 y_2 + n_3 x_3 y_3 = 0. \qquad 2)$$

Eliminirt man x aus 1) und 2), so resultirt für den geometrischen Ort von y folgendes: Es wird aus 2)

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{y_3}{y_1} \cdot \frac{P_1}{D} \qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{P_2}{D} \qquad 3)$$

wobei:

$$D = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} \qquad P_1 = \begin{vmatrix} m_2 & m_3 \\ n_2 & n_3 \end{vmatrix} \qquad P_2 = \begin{vmatrix} m_3 & m_1 \\ n_3 & n_1 \end{vmatrix}$$

Die Werthe 3) in 1) eingesetzt ergeben für den Ort von y:

$$C_3' \quad P_1 P_2 y_3^2 (a_{21} P_1 y_2 + a_{12} P_2 y_1) + D^2 y_1 y_2 (a_1 P_1 y_2 + a_2 P_2 y_1) = 0.$$

Also: $$C_3' = C'_{III},$$

d. h.: Beschreibt ein Punkt x eine C_{III}, deren Mittelpunkt in einem der Hauptpunkte einer Steinerschen Verwandtschaft liegt und welche durch die beiden andern Hauptpunkte geht, so beschreibt y auch eine C_{III}, welche denselben Mittelpunkt hat.

§ 9.

Es ist bekannt, dass man die Coordinaten eines Punktes einer C_3 stets durch rationale Functionen der elliptischen Functionen sn u, cn u, dn u ausdrücken kann.

Bei einer C_{III} gestaltet sich die Sache sehr einfach. Wir können ihre Gleichung in der Form annehmen:

$$a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{10}x + a_{01}y = 0 \qquad 1)$$

gemäss früherer Erörterungen. Hier kommen x und y höchstens in der zweiten Potenz vor. Wir rechnen:

$$y = \frac{-(a_{21}x^2 + a_{01}) + \sqrt{a_{21}^2x^4 + 2(a_{01}a_{21} - 2a_{10}a_{12})x^2 + a_{01}^2}}{2a_{12}x}$$

Wir setzen:

$$R(x) = a_{21}^2x^4 + 2(a_{01}a_{21} - 2a_{10}a_{12})x^2 + a_{01}^2$$

Es enthält dieser Ausdruck nur gerade Potenzen von x. Betrachten wir x^2 als Variabele, so können wir ihre Wurzeln α^2, β^2 rechnen und erhalten:

$$R(x) = a_{21}^2(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)$$

$$R(x) = a_{21}^2\alpha^2\beta^2\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right)$$

Wir setzen: $\frac{x}{\alpha} = \xi$

so wird: $R(x) = R_1(\xi) = a_{21}^2\alpha^2\beta^2(1 - \xi^2)\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\xi^2\right)$.

Schreiben wir: $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = k^2$

und $a_{21}^2\alpha^2\beta^2 = S^2$

so ist $R_1(\xi) = S^2(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)$

und $y = \frac{-(a_{21}\alpha^2\xi^2 + a_{01}) + S\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}}{2a_{12}\alpha\xi}$

Führen wir nun die Variabele u ein, vermöge der Substitution

$$\int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)}} = u,$$

so ist $\xi = \text{sn u}$ $\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2\xi^2)} = \text{cn u. dn u.}$

Endlich erhalten wir:

$$x = \alpha\xi = \alpha \operatorname{sn} u$$

$$y = \frac{-(a_{21}\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u + a_{01}) + a_{21}\alpha\beta \operatorname{cn} u . \operatorname{dn} u}{2a_{12}\alpha . \operatorname{sn} u}$$

wodurch x und y als rationelle Functionen eines Parameters u dargestellt sind.

Durch einen Punkt p einer C_{III} gehen, ausser der in p die Curve berührenden Tangente, noch vier weitere Tangenten. Das Doppelverhältniss dieser vier Strahlen ist nun constant für eine gegebene C_3, also unabhängig von der Lage des Punktes p, und ferner steht es zum Modul k^2 in einer einfachen Beziehung. Es ist daher von Wichtigkeit, den Werth dieses Doppelverhältnisses zu kennen. In unserm Falle können wir es sehr leicht angeben. Als Curvenpunkt p wählen wir den Mittelpunkt. Drei Tangenten sind die Asymptoten, die vierte fällt mit der Wendetangente zusammen. Nach 1) ist nun:

$y = 0$	die erste Asymptote
$x = 0$	» zweite »
$a_{21}x + a_{12}y = 0$	» dritte »
$a_{10}x + a_{01}y = 0$	» Wendetangente.

Die zwei letztern betrachten wir als Elemente eines Strahlbüschels mit den beiden erstern als Grundstrahlen, also:

$$a_{21}x + a_{12}y \equiv x + \lambda y = 0$$
$$a_{10}x + a_{01}y \equiv x + \mu y = 0.$$

Somit findet man das Doppelverhältniss $\triangle$ der vier Strahlen:

$$\triangle = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{a_{01} . a_{21}}{a_{10} . a_{12}}.$$

Inhalts-Verzeichniss.

Seite

Einleitung 5

§ 1. Nothwendige Eigenschaften dafür, dass eine C_3 einen Mittelpunkt besitzen könne 6

§ 2. Beweise für die Existenz von Curven dritter Ordnung, welche einen Mittelpunkt besitzen 10

§ 3. Ueber die Asymptoten einer auf specielle Art erzeugten C_{III} 16

§ 4. Harmonische Polare des Mittelpunkts. Verwandlung einer C_3 in eine C_{III} durch Projection 18

§ 5. Anzahl der Bedingungen, welchen die Angabe des Mittelpunkts äquivalent ist. Jede C_{III} kann als Erzeugniss zweier projectivischer Büschel von ganz bestimmter Art angesehen werden. Vereinfachung der Gleichung. Nachtrag über die Asymptoten 20

§ 6. Poloconik der unendlich fernen Geraden und der Wendetangente im Mittelpunkt. Punktquadrupel. Tangenten in den Endpunkten von Durchmessern. Kegelschnitte, welche in den Endpunkten eines Durchmessers berühren . . . 26

§ 7. Wendepunkte und Hesse'sche Curve einer C_{III} . . . 32

§ 8. Anwendung auf die Steiner'sche Verwandtschaft . . . 35

§ 9. Parameterdarstellung der Coordinaten vermöge elliptischer Functionen. Doppelverhältniss der C_{III} . . . 37

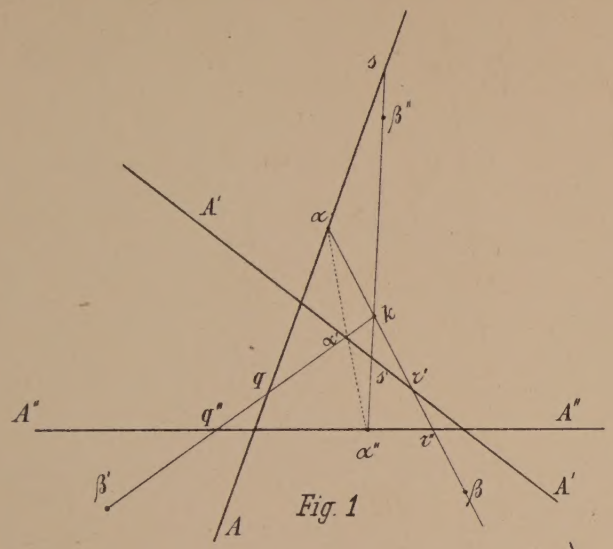


Fig. 1

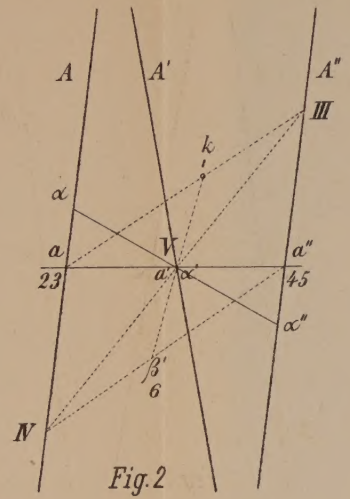


Fig. 2

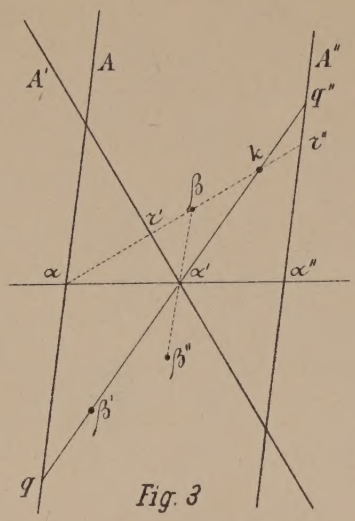


Fig. 3

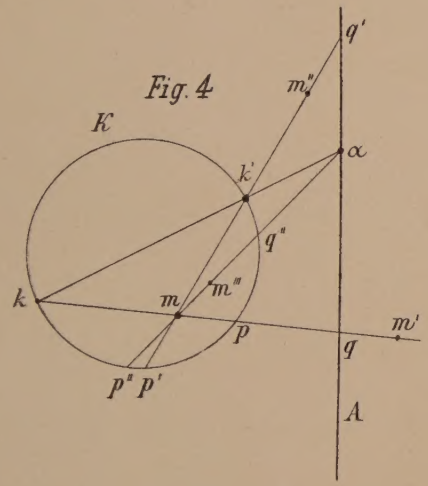


Fig. 4

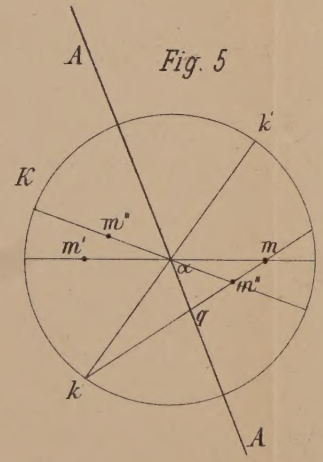


Fig. 5

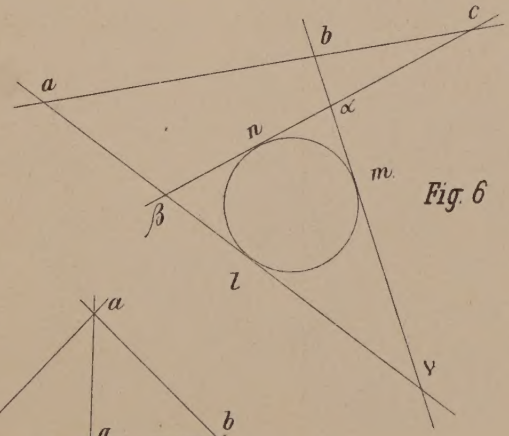


Fig. 6

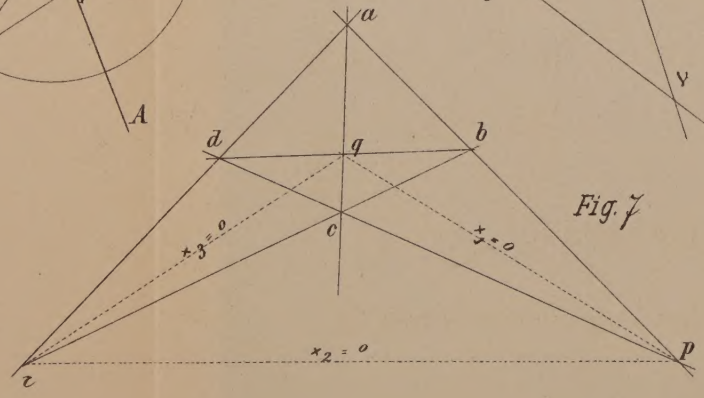
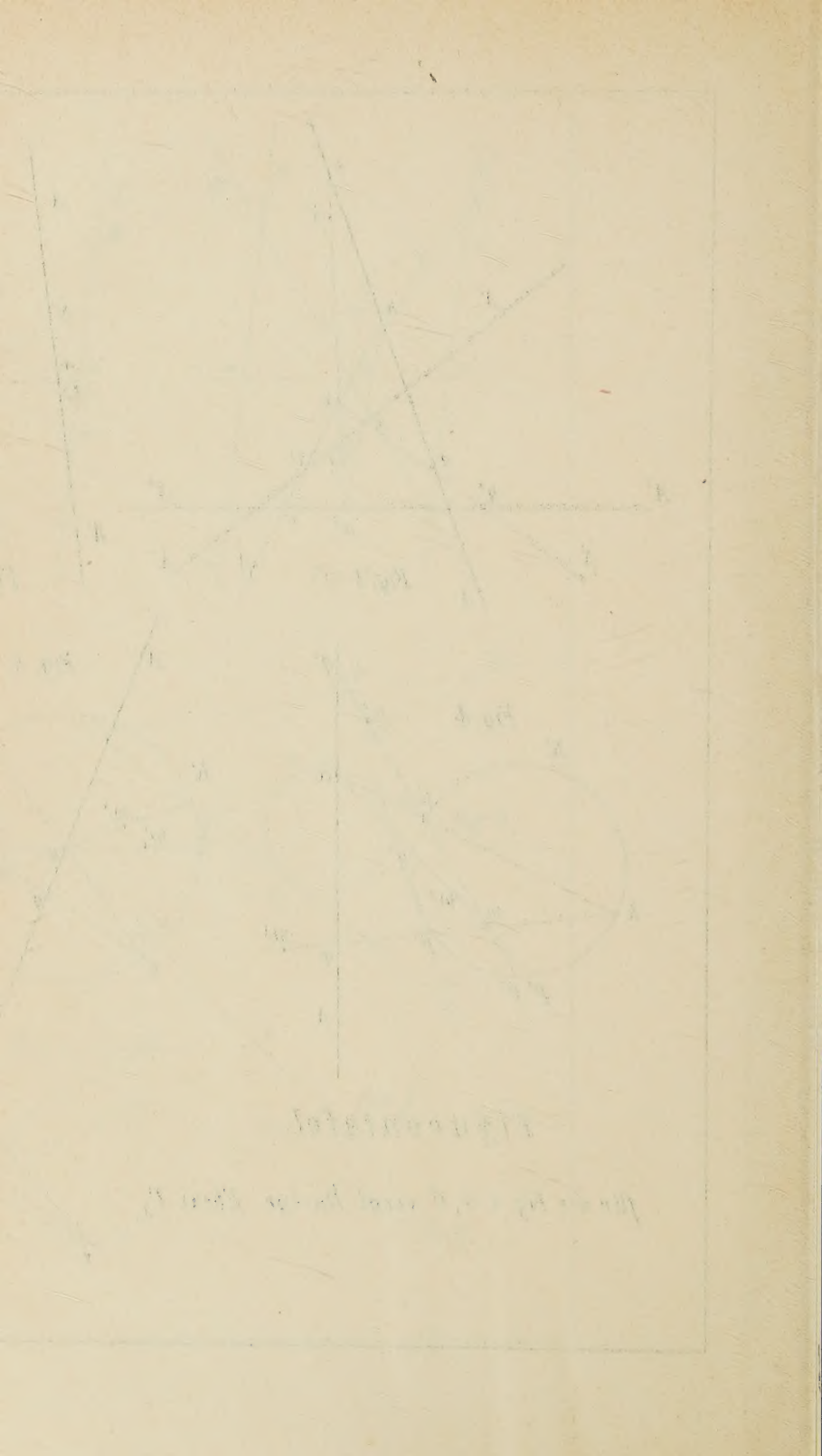
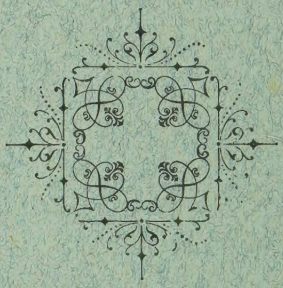


Fig. 7

Figurentafel

für die Fig. 1, 4, 6 vergl. Durège: Ebene C_3